

Studenten (derdejaars en ouder) die het tentamen Statistische Fysica 2 (voor 4 ECTS) willen afleggen behoeven opgave 4 niet te maken.

**Maak iedere opgave op een apart vel
Schrijf op ieder vel naam en studentnummer**

Opgave 1

Een spinsysteem heeft een niet ontaarde grondtoestand en een m-voudig ontaarde aangeslagen toestand bij energie ε . De wisselwerking tussen de spins is zo klein dat ze als onafhankelijk mogen worden beschouwd. Het totale aantal spins wordt aangeduid met N, het aantal spins in een aangeslagen toestand wordt aangeduid met n.

- Geef het aantal microtoestanden dat correspondeert met de macrotoestand waarin n spins de energie ε hebben.
- Bereken het aantal spins met energie ε als functie van de temperatuur T.
- Bereken de warmtecapaciteit van dit systeem als functie van de temperatuur.

Opgave 2

Beschouw een klassiek tweedimensionaal ideaal gas, bestaande uit N deeltjes met massa m zonder interne structuur. Het 'volume' van dit gas wordt gegeven door het oppervlak A.

- Laat zien dat de toestandssom van dit gas wordt gegeven door: $Z = \frac{1}{N!} A^N \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^N$

Hint: De eendeeltjes toestandsdichtheid van een driedimensionaal gas in een volume V wordt

$$\text{gegeven door } f(p)dp = V \frac{4\pi p^2 dp}{h^3}.$$

Bedenk zelf hoe de toestandsdichtheid er uit moet zien in twee dimensies.

- Laat zien dat in het algemeen voor de vrije energie F geldt: $dF = -S dT - p dV$
- Laat zien dat de entropie van het twee-dimensionale gas gegeven wordt door:

$$S = Nk \left\{ \ln \frac{A}{N} + \ln T + 2 + \ln \frac{2\pi mk}{h^2} \right\}$$

Opgave 3

Een hoge druk pan ("pressure cooker") werkt bij een druk $P = 2$ bar. Bepaal de temperatuur T in de pan.

Je kunt gebruik maken van de volgende gegevens en aannames:

De hoge druk pan bevat voortdurend water in evenwicht met waterdamp.

Waterdamp mag worden opgevat als een ideaal gas

Het kookpunt van water bij $P = 1$ bar wordt gegeven door $T_K = 373$ K.

De verdampingswarmte van water wordt gegeven door $L = 2,25$ MJ/kg.

De verdampingswarmte van water is constant over het temperatuurbereik dat hier relevant is.

Opgave 4

a) Laat zien dat de toestandssom van een fotogas geschreven kan worden als: $Z_{ph} = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_r}}$

b) Leid een uitdrukking af voor de vrije energie F van een foton gas.

c) Laat zien dat de stralingsdruk van een fotogas wordt gegeven door: $P = \frac{k^4 \pi^2 T^4}{45 c^3 \hbar^3}$

Opgave 5

Hoewel Bose-Einstein condensatie in beginsel een verschijnsel is dat betrekking heeft op verdunde gassen (deeltjes zonder wisselwerking), mag worden aangenomen dat een soortgelijk verschijnsel bestaat in bosonsystemen met wisselwerking tussen de deeltjes. Zo kan bijvoorbeeld de lambda overgang in vloeibaar Helium (waarbij beneden de overgangstemperatuur superfluide Helium ontstaat) worden opgevat als een vorm van Bose-Einstein condensatie.

a) Laat zien dat de overgangstemperatuur voor Bose-Einstein condensatie in systemen van deeltjes zonder spin en zonder wisselwerking gegeven wordt door:

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k} \left(\frac{N}{2,612 V} \right)^{2/3}$$

Ga hierbij uit van de eendeeltjes distributie functie $n(\epsilon)$ voor bosonen en de eendeeltjes toestandsdichtheid $f(p)dp$ in de impulsruimte. Neem aan dat de chemische potentiaal μ bij alle relevante temperaturen negatief is en in grootte klein is t.o.v. van alle energietoestanden die verschillend zijn van nul.

b) Stel dat de uitdrukking voor T_c uit som a ook kan worden toegepast op vloeistoffen. Laat zien dat het plausibel is dat de lambda overgang in Helium kan worden toegeschreven aan Bose-Einstein condensatie.

c) Bediscussieer de mogelijkheid dat Bose-Einstein condensatie optreedt in vloeibaar waterstof. (waterstof wordt vast bij 14 K)

dichtheden van de vloeistoffen: $\rho(\text{liquid He}) = 124 \text{ g/dm}^3$; $\rho(\text{liquid H}_2) = 70,8 \text{ g/dm}^3$

Physical constants:

Getal van Avogadro: $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante van Planck: $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

Constante van Boltzmann: $k = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

Gasconstante: $R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Lichtsnelheid: $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

Rustmassa elektron $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Rustmassa proton $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Bohr magneton $\mu_B = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A m}^2$

Integrals:

n	$\int_0^{\infty} dx x^n e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^x - 1}$	$\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^x + 1}$	$\int_0^{\infty} \frac{x^n e^x}{(e^x - 1)^2}$	$\int_0^{\infty} x^n \ln(1 - e^{-x}) dx$
0	$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)}$	diverges	$10 \log 2$	diverges	$-\frac{\pi^2}{6}$
1/2	$\frac{0,6127}{a^{3/4}}$	$2,612 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0,6781	diverges	$-1,341 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
1	$\frac{1}{2a}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^2}{12}$	diverges	-1,202
3/2	$\frac{0,4532}{a^{5/4}}$	$1,341 \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	1,153		$-1,127 \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
2	$\frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$	2,404	1,803	$\frac{\pi^2}{3}$	$-\frac{\pi^4}{45}$
5/2	$\frac{1,662}{a^{7/4}}$	$1,127 \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$	3,083		-3,505
3	$\frac{1}{2a^2}$	$\frac{\pi^4}{15}$	$\frac{7\pi^4}{120}$	7,212	-6,221
7/2	$\frac{0,5665}{a^{9/4}}$	12,268	11,184		
4	$\frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}}$	24,886	23,331	$\frac{4\pi^4}{15}$	